

## Analisi Matematica

### Funzione convessa e funzione concava

#### Nota teorica ed esempi esplicativi

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subseteq \mathbb{R}$ , una funzione reale di variabile reale.

Supponiamo che  $[x_1; x_2] \subseteq A$ , con  $x_1 \neq x_2$  sia un intervallo in cui la funzione  $f$  è continua. La rappresentazione del grafico della funzione relativamente all'intervallo  $[x_1; x_2]$  è una linea costituita da un solo arco avente per estremi i punti del piano cartesiano  $P_1(x_1; f(x_1))$ ,  $P_2(x_2; f(x_2))$ .

Sussiste la seguente

**Definizione di funzione convessa** nell'intervallo  $[x_1; x_2]$ .

La funzione  $f$  si dice convessa in  $[x_1; x_2]$  se comunque preso un punto interno  $x$  all'intervallo  $[x_1; x_2]$  il punto del grafico  $P(x; f(x))$  si trova al di sotto del segmento avente per estremi i punti  $P_1(x_1; f(x_1))$ ,  $P_2(x_2; f(x_2))$ .

E' opportuno precisare che esiste anche la definizione di funzione concava in un intervallo.

**Definizione di funzione concava** in  $[x_1; x_2]$ .

Se comunque preso un punto  $x$  interno all'intervallo  $[x_1; x_2]$  si verifica che il punto del grafico  $P(x; f(x))$  si trova al di sopra del segmento avente per estremi i punti  $P_1(x_1; f(x_1))$ ,  $P_2(x_2; f(x_2))$  allora la funzione si dice concava in  $[x_1; x_2]$  o che in  $[x_1; x_2]$  volge la concavità verso il basso.

#### Esempi

1) La funzione  $f(x)=x^2$ , rappresentata in Figura 1, è definita su tutto  $\mathbb{R}$  ed è convessa in qualsiasi intervallo  $[x_1; x_2] \subseteq \mathbb{R}$ .

2) La funzione  $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ , definita in  $\mathbb{R}-\{0\}$  e rappresentata in Figura 2, è convessa in ciascun intervallo  $[x_1; x_2] \subseteq ]0; +\infty[$ , ma non lo è in ciascun intervallo  $[x_1; x_2] \subseteq ]-\infty; 0[$ .

\*\*\*

**Obiettivo-** Come riconoscere quando una funzione è convessa nell'intervallo  $[x_1; x_2]$ .

In generale in analisi matematica per riconoscere la proprietà di convessità di una funzione continua che ammetta almeno anche le derivate dei primi due ordini si sfrutta il segno della derivata seconda. Precisamente, si riconosce che se in un intervallo  $]a; b[$  una funzione ammette derivata seconda e questa assume nei punti dell'intervallo valore positivo allora la funzione è convessa nell'intervallo. Così

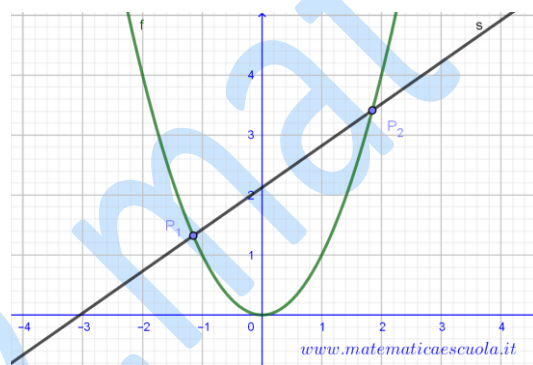


Figura 1- La funzione  $f(x)=x^2$  è convessa in ciascun intervallo  $[x_1; x_2]$  di  $\mathbb{R}$ .

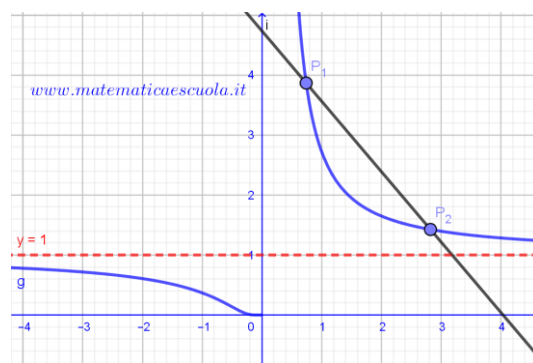


Figura 2-La  $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$  è convessa in ogni intervallo  $[x_1; x_2] \subseteq ]0; +\infty[$  ma non in ogni intervallo  $[x_1; x_2] \subseteq ]-\infty; 0[$ .

pure, se in ogni punto interno all'intervallo  $[x_1; x_2]$  la derivata seconda assume valori negativi allora la funzione è concava nello stesso intervallo.

Se non si conosce la teoria della derivazione di una funzione reale di variabile reale e si è interessati a stabilire se una funzione in un certo intervallo è convessa o concava si può affrontare l'argomento ricorrendo allo studio di una particolare disequazione che descriviamo nella seguente nota operativa. Anticipiamo, comunque, che il procedimento cui ci riferiamo non sempre è di facile esecuzione, perché si potrebbe incorrere nello studio di disequazioni abbastanza impegnative.

**Nota operativa** (per riconoscere la convessità della funzione  $f : A \rightarrow R$ , con  $A \subseteq R$ , in  $[x_1; x_2] \subseteq A$ )

1) Considerati i punti  $P_1(x_1; f(x_1))$ ,  $P_2(x_2; f(x_2))$  del grafico della funzione si scrive l'equazione cartesiana della retta  $s$  che passa per essi (la retta è secante il grafico della funzione). Poiché i due punti hanno ascisse diverse, perché si suppone che risulti  $x_1 \neq x_2$ , la retta  $[P_1; P_2]$  certamente non è parallela all'asse delle ordinate e quindi ammette equazione in forma esplicita  $y = mx + q$ . Nello specifico, l'equazione della retta  $s$  in forma esplicita è

$$s: y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1) \quad (1)$$

2) Descrizione parametrica dell'intervallo  $[x_1; x_2]$

Il generico punto  $x \in [x_1; x_2]$  può essere ottenuto dalla forma algebrica  $x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)$ , con  $0 \leq t \leq 1$ . In particolare, per  $t=0$  si ottiene l'estremo  $x_1$ , per  $t=1$  si ottiene l'estremo  $x_2$ ; per ogni altro valore di  $0 < t < 1$  si ottiene un punto  $x$  interno all'intervallo  $[x_1; x_2]$ . E' appena il caso di far notare che l'applicazione che associa a  $t \in [0; 1]$  il punto  $x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)$  dell'intervallo  $[x_1; x_2]$  è biunivoca.

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

3) Definizione della disequazione da studiare al fine di riconoscere la sussistenza o meno della convessità della funzione  $y = f(x)$ .

3.1) Utilizzando la parametrizzazione (2) si determinano le coordinate del **punto P della curva avente ascissa x**. Risulterà  $P(x; f(x))$ .

3.2) Si determinano le coordinate del **punto Q della retta  $[P_1; P_2]$  avente ascissa x**. Sarà

$$y_Q = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1)$$

che per la (2) diventa  $y_Q = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot t(x_2 - x_1) + f(x_1)$ , quindi

$$y_Q = [f(x_2) - f(x_1)] \cdot t + f(x_1) \quad (3)$$

3.3) La disequazione da studiare è

$$y_P < y_Q \Leftrightarrow f(x) < [f(x_2) - f(x_1)] \cdot t + f(x_1) \Leftrightarrow$$

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < [f(x_2) - f(x_1)] \cdot t + f(x_1), \text{ con } t \in ]0;1[ \quad (4)$$

Se la disequazione sarà soddisfatta per ogni  $t \in ]0;1[$  la funzione sarà convessa internamente all'intervallo  $[x_1; x_2]$ .

### Esempi

**Es1)** Vogliamo dimostrare che la funzione  $f(x)=x^2$  è convessa internamente all'intervallo  $[x_1; x_2]$ , quali che siano i punti reali  $x_1, x_2$ , con  $x_1 < x_2$ .

### Dimostrazione

Scriviamo la disequazione (4) e studiamola nell'incognita  $t$ , per ogni  $t \in ]0;1[$ .

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) < [f(x_2) - f(x_1)] \cdot t + f(x_1) \Leftrightarrow (x_1 + t(x_2 - x_1))^2 < ((x_2)^2 - (x_1)^2) \cdot t + (x_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1)^2 + 2x_1 \cdot t(x_2 - x_1) + t^2(x_2 - x_1)^2 < (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \cdot t + (x_1)^2 ;$$

dividiamo i due membri della disequazione residua per il prodotto positivo  $t(x_2 - x_1)$  e otteniamo la disequazione equivalente

$2x_1 + t(x_2 - x_1) < (x_2 + x_1)$ , che diventa  $t(x_2 - x_1) < x_2 - x_1$ , e semplificando il fattore positivo  $(x_2 - x_1)$  si ottiene la disuguaglianza  $t < 1$  che è evidentemente vera per l'ipotesi sul parametro  $t$ . C.V.D.

**Es2)** Vogliamo dimostrare che la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  è concava internamente all'intervallo  $[x_1; x_2]$ , quali che siano i punti reali  $x_1, x_2$ , con  $0 \leq x_1 < x_2$ .

### Dimostrazione

Il grafico della funzione in oggetto e gli elementi descrittivi aggiuntivi sono riportati in Figura 3.

Dobbiamo provare che sussiste la disuguaglianza  $y_P > y_Q$ , che riportiamo con i simboli della funzione:

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) > [f(x_2) - f(x_1)] \cdot t + f(x_1), \text{ con } t \in ]0;1[.$$

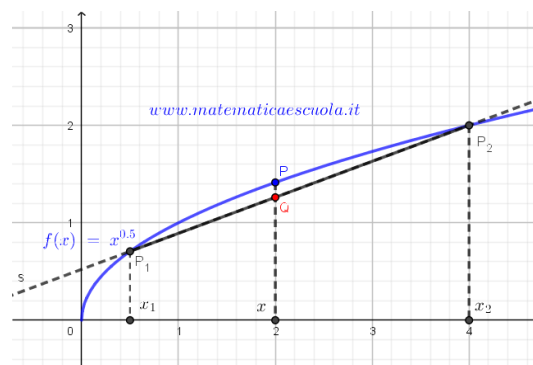


Figura 3

La disuguaglianza esplicita è

$$\sqrt{x_1 + t(x_2 - x_1)} > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \cdot t + \sqrt{x_1} \quad (2.1)$$

Osservato che i due membri sono strettamente positivi si possono elevare al quadrato conservando lo stesso verso; si ottiene la disuguaglianza equivalente:

$$[\sqrt{x_1 + t(x_2 - x_1)}]^2 > [(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \cdot t + \sqrt{x_1}]^2 \rightarrow x_1 + t(x_2 - x_1) > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \sqrt{x_1} + x_1 \rightarrow$$

$$t(x_2 - x_1) > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \sqrt{x_1} \quad (2.2)$$

Tenendo conto dell'ipotesi  $0 \leq x_1 < x_2$  sussiste la seguente catena di uguaglianze

$$x_2 - x_1 = (\sqrt{x_2})^2 - (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})$$

Procediamo con l'elaborazione della disuguaglianza (2.2).

$$t(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})\sqrt{x_1}$$

Nei termini dei due membri figura il prodotto positivo  $t \cdot (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})$  che può essere perciò semplificato; la disuguaglianza da provare diventa

$$\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \cdot t + 2\sqrt{x_1}, \text{ equivalente alla disuguaglianza}$$

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \cdot t, \text{ che è vera per l'ipotesi sul parametro } t, 0 < t < 1. \text{ C.V.D.}$$